逻辑导论

周无寒
北京大学信息科学技术学院

2025 年 6 月 2 日

摘要

本文来自北京大学哲学系王彦晶、钟盛阳、丁一峰和姚博凯 2025 年春季学期的逻辑导论。

目录

1　导言

逻辑学几样重要的组成部分：形式语言、模型、语义、推理系统。我们可以研究它们的元性质：可靠性、完全性等。

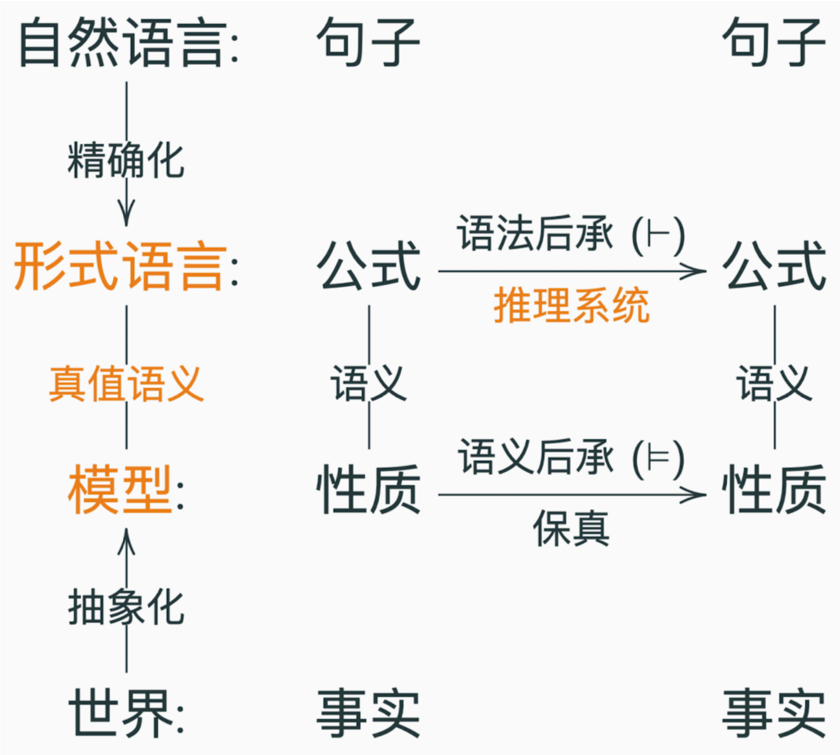

图 1: 原始图景

1.1　形式语言

给定一个**符号集合** $S = A, B.C, D, \cdots$，令**形式语言** L_{all} 为包含所有形如下面这一类句子 $(X, Y \in S)$ 的集合：

- All X are Y.

这里一个“语言”是符合上述“语法”的句子 (**公式**) 的集合。严格来说应该叫 L^S_{all}，因为它依赖于 S。

我们将没前提的**规则**叫**公理**，这两个组成的**推理系统**叫做 Sys_{all}。

给定**前提集** Γ，$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow$ 存在一个有穷推理树使得“树根”是 φ，且所有的叶子都在 Γ 中出现或是公理，树枝靠规则“连接”。

$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow$ 存在以 φ 结尾的**有穷**序列使得序列里的句子

- 或者是公理
- 或者在 Γ 中

- 或者由前面已有的应用系统内的规则得到。

$\Gamma \vdash \varphi$ 也叫**语法后承**，因为**和语义无关**，只是套形式规则得到，也可以说 Γ 语形的推出 φ。

前提集为空的推演很多时候叫做 (这个系统内的) **证明**，证明出的句子叫**内定理**。

1.2 形式语义

一个 L_{all}^S 的**模型** $\mathcal{M}$ 由两部分组成 $\mathcal{M} = \langle O, I \rangle$:

- O 是一个集合
- $I : S \to \mathcal{P}(O)$ 是一个解释函数，将 S 中的符号解释成 O 的**子集**。

句子在模型上为**真** ($\mathcal{M}$ 满足 All X are Y) 定义为

$$\mathcal{M} \models \text{All X are Y} \Leftrightarrow I(X) \subseteq I(Y) \tag{1}$$

如果对每个 $\varphi \in \Gamma$，$\mathcal{M} \models \varphi$，则记 $\mathcal{M} \models \Gamma$。

定义 $\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow$ 对任意模型 $\mathcal{M}$，如果 $\mathcal{M} \models \Gamma$，则 $\mathcal{M} \models \varphi$。这时称 φ 是 Γ 的**语义后承**：任何情况下 Γ 里的都真则 φ 也真。从 Γ 得到 φ 的推理是有效的，可以理解成语义上的推出。

1.3 可靠性与完全性

可靠性：对任意在 L_{all} 中的 Γ 和 φ，如果 $\Gamma \vdash \varphi$ 则 $\Gamma \models \varphi$，即能推出来的都是靠谱的。

完全性：对任意在 L_{all} 中的 Γ 和 φ，如果 $\Gamma \models \varphi$ 则 $\Gamma \vdash \varphi$，即能靠谱的的都能推出来。

2 (经典) 命题逻辑理论 (上): 形式语言和形式语义

2.1 语言

2.1.1 内容与形式

推理由作为**前提**的一组陈述句和作为**结论**的一个陈述句组成。一个推理可以因形式而正确，也可以因内容而正确。

连词标记和表达了一个陈述句的**命题逻辑形式**。我们把连词抽象出来，统称为**命题联结词**，并且引入**命题联结词符号**。

中文连词	命题联结词	命题联结词符号
并且	合取	$\wedge$
或者	析取	$\vee$
如果 $\cdots$ 那么 $\cdots$	蕴含	$\rightarrow$
并非	否定	$\neg$
当且仅当	等价	$\leftrightarrow$

表 1: 命题联结词

2.1.2 命题逻辑的形式语言

命题逻辑的形式语言的初始符号由以下 3 部分组成 (假设这 3 部分没有公共的元素):

- 命题联结词符号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
- 命题字母: $p_0, p_1, p_2, \cdots$
- 技术符号 (括号): $(,)$

定义公式为

- 每个命题字母都是一个公式
- 如果 φ 和 ψ 都是公式，则 $(\varphi \wedge \psi)$、$(\varphi \vee \psi)$、$(\varphi \rightarrow \psi)$ 和 $\neg\varphi$ 都是公式

有穷次使用以上规则得到的符号串是**公式**。

结构归纳法的套路: 要证“对于任意一个公式 φ，都有性质 P”，只需要证明

- 每个命题字母都有性质 P
- 如果 φ 和 ψ 都有性质 P，则 $(\varphi \wedge \psi)$、$(\varphi \vee \psi)$、$(\varphi \rightarrow \psi)$ 和 $\neg\varphi$ 也都有性质 P

2.2 语义

2.2.1 真与假

一般来说，陈述句所表述的内容是命题，命题有真假。我们的理论假设有二值原理和组合原理。

二值原理: 真值有且仅有两个，真和假。每个命题具有且只具有这两个真值的其中一个。

组合原理: 如果一个命题由其他命题组成，则它的真假组成它的命题的真假以及这些命题的组合方式唯一确定。

P	并非 P
F	T
T	F

表 2: 否定的真值条件

P	Q	P 并且 Q
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

表 3: 合取的真值条件

从真值来看,"P 并且 Q"和"Q 并且 P"是一样的；但从其他语义性质来看，特别是从意义来看,"P 并且 Q"和"Q 并且 P"未必是一样的。

P	Q	P 或者 Q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

表 4: 析取的真值条件

此处定义的析取也称为"相容析取"; 加上否定和合取，可以定义"不相容析取"。

形如"如果 P 那么 Q"的陈述句一般称为**条件句**，其中 P 称为**前件**，Q 称为**后件**。下表中对"如果 P 那么 Q"的理解一般称为**实质蕴含**。

P	Q	如果 P 那么 Q
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

表 5: (实质) 蕴含的真值条件

考虑两种情况，合称为**实质蕴涵怪论**：

- 已知 P 为假，则"如果 P 那么 Q"为真，通常称为**空洞为真**。
- 已知 Q 为真，则"如果 P 那么 Q"为真。

现代模态逻辑的产生源自于 C.I.Lewis 解决实质蕴含怪论的尝试。

2.2.2 命题逻辑的形式语义

一个**赋值**是一个从公式集到集合 $\{T, F\}$ 的函数，使得下表中的条件都成立：

$V(\varphi)$	$\Rightarrow$	$V(\neg\varphi)$
T		F
F		T

$V(\varphi)$	$V(\psi)$	$\Rightarrow$	$V(\varphi \wedge \psi)$	$V(\varphi \vee \psi)$	$V(\varphi \to \psi)$
T	T		T	T	T
T	F		F	T	F
F	T		F	T	T
F	F		F	F	T

表 6: 赋值的条件

令 V 为任意赋值，V 有两个特点

- 命题字母在 V 下的函数值，即 $V(p_0), V(p_1), \cdots$，唯一决定了 (整个函数)V。
- 对任意公式 φ，$V(\varphi)$ 由出现在它里面的命题字母在 V 之下的函数值决定，与不出现在它里面的命题字母在 V 之下的函数值无关。

下面是一些定义。

- φ 在 V 上为**真**，或 V **满足** φ，如果 $V(\varphi) = T$。
- V **满足** Γ，如果 $V(\varphi) = T$ 对每个 $\varphi \in \Gamma$ 都成立。

- φ 是 Γ 的一个**语义后承**，记为 $\Gamma \models \varphi$，如果对任意赋值 V，若 V 满足 Γ，则 V 满足 φ。
- φ 是一个 **(命题) 有效式**，或称**重言式**，如果 $\varnothing \models \varphi$，即 $V(\varphi) = T$ 对任意赋值 V 成立。
- φ 与 ψ **逻辑等价**，记为 $\varphi \equiv \psi$，如果 $\{\varphi\} \models \psi$ 且 $\{\psi\} \models \varphi$。

下面是一些重要的逻辑等价关系

- **幂等率** $(\varphi \wedge \varphi) \equiv \varphi$ ，$(\varphi \vee \varphi) \equiv \varphi$
- **交换率** $(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi)$，$(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$
- **结合率** $(\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi)$，$(\varphi \vee (\psi \vee \chi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \vee \chi)$
- **吸收率** $(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \equiv \varphi$，$(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \equiv \varphi$
- **分配律** $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$，$(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$
- **(无) 矛盾律和排中律** $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ 和 $(\varphi \vee \neg\varphi)$ 都是重言式
- **双重否定律** $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$
- **德・摩根律** $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$，$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

紧致性定理：对任意公式集 Γ，以下是等价的

- 存在一个赋值满足 Γ
- 对于 Γ 的每一个有穷子集，都存在一个赋值满足它。

3 (经典) 命题逻辑理论 (下): 自然演绎系统, 可靠性完全性定理与希尔伯特式证明系统

3.1 系统——命题逻辑自然演绎

下面介绍命题逻辑的一个形式系统，称为**命题逻辑自然演绎系统**。

自然演绎系统的核心概念是**推演**。这套规则同时定语了关于推演的三个重要概念：用到的前提、结论和高度。特别地，一个推演可以有多个用到的前提，但有且只有一个结论。我们用记号 $\frac{D}{\varphi}$ 表示一个结论为 φ 推演，$h(D)$ 表示 D 的高度。

经典命题逻辑的自然演绎系统一共有 9 条规则。规则 (A) 告诉我们什么事最简单的推演。

规则 (A)：如果 φ 是一个公式，则 φ 或者写成 $\frac{\varphi}{\varphi}(A)$ 是一个推演。它用到的前提是 φ，结论是 φ，高度为 0。

合取引入规则 $(\wedge I)$：如果 φ 和 ψ 是两个公式，并且 $\frac{D_1}{\varphi}$ 和 $\frac{D_2}{\psi}$ 都是推演，那么以下是一个推演：

$$\frac{\begin{matrix} D_1 \\ \varphi \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \psi \end{matrix}}{(\varphi \wedge \psi)} (\wedge I)$$

它用到的前提是 D_1 用到的前提以及 D_2 的用到的前提，结论是 $(\varphi \wedge \psi)$，高度为 $\max(h(D_1), h(D_2)) + 1$。

合取消去规则 $(\wedge E)$：如果 φ 和 ψ 是两个公式，并且 $\frac{D}{\varphi \wedge \psi}$ 是推演，那么以下都是推演：

$$\frac{\begin{matrix} D \\ (\varphi \wedge \psi) \end{matrix}}{\varphi} (\wedge E)$$

$$\frac{\begin{matrix} D \\ (\varphi \wedge \psi) \end{matrix}}{\psi} (\wedge E)$$

它们用到的前提是 D 的用到的前提，结论分别是 φ 和 ψ，高度为 $h(D) + 1$。

析取引入规则 $(\vee I)$：如果 φ 和 ψ 是两个公式，并且 $\frac{D}{\varphi}$ 是推演，那么以下是一个推演：

$$\frac{\begin{matrix} D \\ \varphi \end{matrix}}{(\varphi \vee \psi)} (\vee I)$$

它用到的前提是 D 的用到的前提，结论是 $(\varphi \vee \psi)$，高度为 $h(D) + 1$。如果 φ 和 ψ 是两个公式，并且 $\frac{D}{\psi}$ 是推演，那么以下也是一个推演：

$$\dfrac{\begin{array}{c}D\\ \psi\end{array}}{(\varphi\vee\psi)}\,(\vee I)$$

它用到的前提是 D 的用到的前提，结论是 $(\varphi\vee\psi)$，高度为 $h(D)+1$。

蕴含消去规则 $(\to E)$：如果 φ 和 ψ 是两个公式，并且 $\begin{smallmatrix}D_1\\ \varphi\end{smallmatrix}$ 和 $\begin{smallmatrix}D_2\\ \varphi\to\psi\end{smallmatrix}$ 都是推演，那么以下是一个推演：

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \varphi\end{array}\qquad\begin{array}{c}D_2\\ (\varphi\to\psi)\end{array}}{\psi}\,(\to E)$$

它用到的前提是 D_1 和 D_2 的用到的前提，结论是 ψ，高度为 $\max\{h(D_1),h(D_2)\}+1$。

在推演中，我们用方括号标示假设。令 $\begin{smallmatrix}D\\ \varphi\end{smallmatrix}$ 表示一个推演，用 $\begin{smallmatrix}[\varphi]\\ D\\ \psi\end{smallmatrix}$ 表示在推演 $\begin{smallmatrix}D\\ \psi\end{smallmatrix}$ 中将所有由规则 (A) 引入的 φ 换成 $[\varphi]$ 的结果。

注意：$\begin{smallmatrix}[\varphi]\\ D\\ \psi\end{smallmatrix}$ 不一定是一个推演。

规则 $(\to I)$：如果 φ 和 ψ 是两个公式，并且 $\begin{smallmatrix}[\varphi]\\ D\\ \psi\end{smallmatrix}$ 是推演，那么以下是一个推演：

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ D\\ \psi\end{array}}{(\varphi\to\psi)}\,(\to I)$$

它用到的前提是 D 的用到的前提，结论是 $(\varphi\to\psi)$，高度为 $h(D)+1$。

规则 $(\neg I)$：如果 $\begin{smallmatrix}D\\ \psi\end{smallmatrix}$ 和 $\begin{smallmatrix}D'\\ \neg\psi\end{smallmatrix}$ 都是推演，那么以下是一个推演：

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ D\\ \psi\end{array}\qquad\begin{array}{c}[\varphi]\\ D'\\ \neg\psi\end{array}}{\neg\varphi}\,(\neg I)$$

它用到的前提是除去 φ 以外，D 用到的前提和 D' 的用到的前提，结论是 $\neg\varphi$，高度为 $\max\{h(D),h(D')\}+1$。

规则 (RAA)：如果 $\begin{smallmatrix}D\\ \psi\end{smallmatrix}$ 和 $\begin{smallmatrix}D'\\ \neg\psi\end{smallmatrix}$ 都是推演，那么以下是一个推演：

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ D\\ \psi\end{array}\qquad\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ D'\\ \neg\psi\end{array}}{\varphi}\,(\mathrm{RAA})$$

它用到的前提是除去 $\neg\varphi$ 以外，D 用到的前提和 D' 的用到的前提，结论是 φ，高度为 $\max\{h(D),h(D')\}+1$。(直觉主义逻辑没有这一条规则)

规则 $(\vee E)$：如果 φ 和 ψ 都是公式，并且 $\begin{smallmatrix}D_1\\ (\varphi\vee\psi)\end{smallmatrix}$、$\begin{smallmatrix}D_2\\ \chi\end{smallmatrix}$ 和 $\begin{smallmatrix}D_3\\ \chi\end{smallmatrix}$ 都是推演，那么以下是一个推演：

$$\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ (\varphi\vee\psi)\end{array}\qquad\begin{array}{c}D_2\\ \chi\end{array}\qquad\begin{array}{c}D_3\\ \chi\end{array}}{\chi}\,(\vee E)$$

它用到的前提是 D_1 用到的前提，除去 φ 以外 D_2 用到的前提和除去 ψ 以外 D_3 的用到的前提，结论是 χ，高度为 $\max\{h(D_1), h(D_2), h(D_3)\} + 1$。

令 Γ 是一个公式集且 φ 是一个公式。

- φ 是 Γ**(在自然演绎系统中的) 语形后承**，记为 $\Gamma \vdash^{ND} \varphi$，如果存在一个推演使得它的用到的前提都属于 Γ，结论是 φ。
- φ 是 **(自然演绎系统中) 可证的**，如果 $\varnothing \vdash^{ND} \varphi$。
- Γ 是 **(自然演绎系统中) 一致的**，如果不存在一个公式 ψ 使得 $\Gamma \vdash^{ND} \psi$ 和 $\Gamma \vdash^{ND} \neg\psi$ 都成立。

3.2 可靠性定理与完全性定理

(强) 可靠性定理：对于任意公式集 Γ 和公式 φ，如果 $\Gamma \vdash^{ND} \varphi$，则 $\Gamma \models \varphi$。
(强) 完全性定理：对于任意公式集 Γ 和公式 φ，如果 $\Gamma \models \varphi$，则 $\Gamma \vdash^{ND} \varphi$。
(弱) 完全性定理：对于任意公式 φ，如果 $\varnothing \models \varphi$，则 $\varnothing \vdash^{ND} \varphi$。

3.3 希尔伯特式证明系统

4 命题逻辑应用

4.1 自然语言中的命题逻辑

自然语言中关于析取的一大困难是区分其相容析取和不相容析取的含义。这也涉及"语义"和"语用"之间的分界问题。我们可以引入异或 $\oplus$ 对应不相容的"或者"。

φ	ψ	$\varphi \oplus \psi$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

表 7: 异或的真值条件

一种流行的观点是汉语中的"要么…要么…"表达的是不相容析取。$\varphi \oplus \psi$ 与 $\neg\varphi \to \psi$ 不等价。

"φ 除非 ψ"等价于"$\varphi \wedge \psi$"等价于"$\neg\psi \to \varphi$"。

4.2 可满足性问题

定理 4.1. *对任何一张有穷平面地图，我们都能将其中所有区域染成 4 种颜色之一使得相邻区域颜色不同。*

定理 4.2. *对任意图 (可以无穷)，如果它的每一个有穷部分都能被 n 染色，则整个图也可以被 n 染色。*

4.3 真值函数完全性和插值定理

一组命题联结词是**真值函数完全的** $\Leftrightarrow$ 任何一个真值函数都能用一个只使用这一组命题联结词的命题逻辑公式表达。

可以观察到 $\{\neg, \wedge, \vee\}, \{\neg, \wedge\}, \{\neg, \vee\}, \{\neg, \to\}$ 都是真值函数完全的，$\{\neg, \leftrightarrow\}, \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ 不是真值函数完全的。

定理 4.3. *$NAND$ 自身是真值函数完全的。*

φ	ψ	$\varphi \uparrow \psi$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

表 8: 与非的真值条件

$\varphi \uparrow \varphi$ 表示否定，$(\varphi \uparrow \varphi) \uparrow (\psi \uparrow \psi)$ 表示合取。

令 $Prop(\varphi)$ 为 φ 中所有的命题字母的集合。

定理 4.4. *如果 $Prop(\varphi) \cap Prop(\psi) = \varnothing$，则 $\varphi \to \psi$ 只会平凡地有效 (是重言式)：如果 $\varphi \to \psi$ 有效，那么要么 φ 是矛盾式，要么 ψ 是重言式。*

定理 4.5 (**插值定理**). *如果 $\varphi \vdash \psi$，那么一定存在一个公式 χ，使得*

- $Prop(\chi) \subset Prop(\varphi) \cap Prop(\psi)$
- $\varphi \vdash \chi$
- $\chi \vdash \psi$

4.4 通往模态逻辑

$\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\} \models_{\text{很有可能}} \psi$：如果每一个 φ_i 都很有可能，则 ψ 也很有可能。

重言式都很有可能。如果 $\{\varphi\} \models \psi$，则 $\varphi \models_{\text{很有可能}} \psi$。

5 模态逻辑

C.I.Lewis 提出“严格蕴含”($p \multimap q$)：不可能 (p 真而 q 假)。这等价于必然 (p 真则 q 真)，必然 ($p \to q$)。

$(p \to q) \vee (q \to p)$ 是重言式，$\neg(p \to q) \vee \neg(q \to p)$ 是矛盾式。如果把充分必要条件理解成严格蕴含，$(p \multimap q) \vee (q \multimap p)$ 直观上就不有效了。这就引出了**模态逻辑**。

5.1 模态逻辑的形式语言

- 小写字母 $p, q \cdots$ 是命题逻辑语言中的原子公式
- 如果 φ 和 ψ 都是公式，则 $(\varphi \wedge \psi)$、$(\varphi \vee \psi)$、$(\varphi \to \psi)$、$\neg\varphi$ 都是公式
- 如果 φ 是一个公式，则 $\Box\varphi$ 和 $\Diamond\varphi$ 都是公式
- 如果一串符号不能通过上面的规则生成，则它不是公式

$\Box$ 在基本的模态逻辑中代表“**必然**”、“永远”、“知道”、“必须”等。不同领域也会把 $\Box$ 写成 $\mathcal{K}_i$(i的知识)、$\mathcal{G}$(永远) 等。$\Diamond$ 分代表“**可能**”、“有时”、“允许”等。

$\Box$ 和 $\Diamond$ 的真值不完全由 φ 的真值决定，不是命题逻辑词。

5.2 模态逻辑的形式语义

一个克里普克模型 $\mathcal{M}$ 由三部分组成 $\langle W, R, V \rangle$:

- W 是一个非空集合 (一堆可能世界或者可能的状态)
- R 是 W 上的一个可达关系 (wRv 表示如果现实世界是 w，那么 v 是它的一个可能的替代世界)
- $V : W \to \mathcal{P}(P)$ 确定可能世界上哪些基本命题为真哪些为假。换句话说，V 给每个世界一个真值表。

满足关系 $\models$ 定义在点模型 $\mathcal{M}, w$(模型 + 一个“真实世界”) 上，只有在确定一个世界后才能确定所有公式的真假:

$$
\boxed{
\begin{array}{c}
\mathcal{M}, w \models \top \Leftrightarrow \text{永真} \\
\mathcal{M}, w \models p \Leftrightarrow p \in V(w) \\
\mathcal{M}, w \models \neg\varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \not\models \varphi \\
\mathcal{M}, w \models (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \models \varphi \text{ 且 } \mathcal{M}, w \models \psi \\
\mathcal{M}, w \models \Box\varphi \Leftrightarrow \forall v \in W, wRv \Rightarrow \mathcal{M}, v \models \varphi
\end{array}
}
$$

表 9: 满足关系

框架：没有赋值函数 V 的模型 $\langle W, R\rangle$(模型的骨架)。我们希望逻辑真理与基本命题的内容无关，所以可以考虑框架上有效的公式。记 $\mathcal{F}$ 为框架，$\mathbb{C}$ 为某些框架的类。

记法	定义	说法
$\mathcal{M}, w \models \varphi$		φ 在点模型 $\mathcal{M}, w$ 上为真
$\mathcal{M} \models \varphi$	对所有 $w : \mathcal{M}, w \models \varphi$	φ 在模型 $\mathcal{M}$ 上有效
$\mathcal{F}, w \models \varphi$	对所有 $V : \mathcal{F}, V, w \models \varphi$	φ 在点模型 $\mathcal{F}, w$ 上为真
$\mathcal{F} \models \varphi$	对所有 $V, w : \mathcal{F}, V, w \models \varphi$	φ 在框架 $\mathcal{F}$ 上有效
$\mathbb{C} \models \varphi$	对所有 $\mathbb{C}$ 中的框架 $\mathcal{F} : \mathcal{F} \models \varphi$	φ 在 $\mathbb{C}$ 上有效
$\models \varphi$	对所有框架 $\mathcal{F} \models \varphi$	φ 有效

表 10: 框架

令 $\varphi \dashv \psi$ 为 $\Box(\varphi \to \psi)$，实质蕴涵怪论对严格蕴含不成立。

我们会考虑具有特定性质的模型和框架。我们称 φ 对应于框架性质 X，如果任意框架 $\mathcal{F}$：φ 在框架 $\mathcal{F}$ 上有效 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ 有性质 X。

公式	框架性质
$\Box p \to p$	自反性：$\forall x Rxx$
$\neg\Box\bot$	持续性：$\forall x \exists y Rxy$
$p \to \Box\Diamond p$	对称性：$\forall x \forall y (Rxy \to Ryx)$
$\Box p \to \Box\Box p$	传递性：$\forall x \forall y \forall z (Rxy \wedge Ryz \to Rxz)$
$\Diamond p \to \Diamond\Diamond p$	稠密性：$\forall x \forall y \forall z (Rxy \to \exists z (Rxz \wedge Rzy))$
$\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$	合流性：$\forall x \forall y (Rxy \wedge Rxz \to \exists t (Ryt \wedge Rzt))$
$\Box(\Box p \to p) \to \Box p$	传递且没有无穷下降链

表 11: 数学性质与框架有效性的对应

5.3 模态逻辑们的希尔伯特公理系统

5.4 模态逻辑的元定理

定义语义上的后承关系：$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow$ 对所有点模型 $\mathcal{M}, w$ 如果 $\mathcal{M}, w \models \Gamma$ 则 $\mathcal{M}, w \models \varphi$。

我们可以证明对基本 K 系统的可靠性和完全性：

$$\Gamma \vdash_K \varphi \Longleftrightarrow \Gamma \models \varphi \tag{2}$$

5.5 举例：知识逻辑

给定命题字母的集合 P，主体集 Ag:

- 小写英文字母 $p, q \cdots \in P$ 是命题逻辑语言中的原子公式
- 如果 φ 和 ψ 都是公式，则 $(\varphi \wedge \psi)$、$(\varphi \vee \psi)$、$(\varphi \to \psi)$、$\neg\varphi$ 都是公式
- 如果 φ 是公式，则 $\mathcal{K}_i\varphi$ 也是公式，其中 $i \in Ag$。
- 如果一串符号不能通过上面的规则生成，则它不是公式

$\mathcal{K}_i\varphi$ 代表 i 知道 φ 为真。把 $\mathcal{K}_i$ 换成 $\mathcal{B}_i$ 就是**信念逻辑**的语言。

无知：$\mathsf{I}_i\varphi := \neg\mathcal{K}_i\varphi \wedge \neg\mathcal{K}_i\neg\varphi$。

下面介绍理想化的知识推理系统 S5(对自反传递对称的框架类可靠完全)

公理模式		推理规则	
TAUT	命题重言式	MP	$\frac{\varphi,\varphi\to\psi}{\psi}$
K	$\mathcal{K}_i(\varphi \to \psi) \to (\mathcal{K}_i\varphi \to \mathcal{K}_i\psi)$	NEC	$\frac{\varphi}{\mathcal{K}_i\varphi}$
T	$\mathcal{K}_i\varphi \to \varphi$		
4	$\mathcal{K}_i\varphi \to \mathcal{K}_i\mathcal{K}_i\varphi$		
5	$\neg\mathcal{K}_i\varphi \to \mathcal{K}_i\neg\mathcal{K}_i\varphi$		

表 12: S5

- 4，5：正负自省公理
- T：理想的知识应该是真的

下面是信念逻辑的常用系统 KD45(对持续传递欧性的框架类完全)

公理模式		推理规则	
TAUT	命题重言式	MP	$\frac{\varphi,\varphi\to\psi}{\psi}$
K	$\mathcal{B}_i(\varphi \to \psi) \to (\mathcal{B}_i\varphi \to \mathcal{B}_i\psi)$	NEC	$\frac{\varphi}{\mathcal{B}_i\varphi}$
D	$\neg\mathcal{B}_i\bot$		
4	$\mathcal{B}_i\varphi \to \mathcal{B}_i\mathcal{B}_i\varphi$		
5	$\neg\mathcal{B}_i\varphi \to \mathcal{B}_i\neg\mathcal{B}_i\varphi$		

表 13: KD45

信念系统放弃了 T 公理，但是要求信念至少是**一致的**：你不能相信矛盾。

6 一阶逻辑理论 (上)：形式语言和形式语义

6.1 语言

6.1.1 简单句

简单句由名字和谓词两部分组成。**名字**指称个体，**谓词**表达单个个体的性质或者个体之间的关系。

在数学中，名字有三类：变元、专名、限定摹状词。

谓词是一个有空位的表达式，在表达式中填入名字后就变成一个简单句。表示等同关系的谓词称为**等词**。

令 A 是一个集合，一个 A 上的 n 元关系 R 是 A^n 的一个子集：$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 具有该关系 $\Leftrightarrow (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in R$。特别地，$A$ 的一个子集是 A 上的一个一元关系，通常称为一个**性质**。

6.1.2 一阶逻辑的形式语言

每个一阶逻辑形式语言都会有以下符号：

- 个体变元：$x_0, x_1, x_2, \cdots$
- 等词符号：$\doteq$
- 命题联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
- 量词符号：$\forall, \exists$
- 技术符号：(，)，,

不同的一阶逻辑形式语言，以下符号，称为**非逻辑符号**，会有不同：

- 常元符号
- 函数符号
- 关系符号

给出一个一阶逻辑形式语言 $\mathcal{L}$，就是给出 $\mathcal{L}$ 中的常元符号 (可以没有)、函数符号 (可以没有) 及其元数、关系符号 (可以没有) 及其元数。

令 $\mathcal{L}$ 是一个一阶逻辑形式语言。在 $\mathcal{L}$ 中，用于指称个体的符号串称为 **$\mathcal{L}$-项**。

- 每一个个体变元都是一个 $\mathcal{L}$-项。
- 每一个常元变元都是一个 $\mathcal{L}$-项。

- 如果 F 是 $\mathcal{L}$ 中的 n 元函数符号，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是 n 个 $\mathcal{L}$-项，则 $F(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 是一个 $\mathcal{L}$-项。

有穷次使用以上规则得到的符号串是 $\mathcal{L}$-项。

在 $\mathcal{L}$ 中，表达简单句的符号串称为**原子 $\mathcal{L}$-公式**。

- 如果 R 是 $\mathcal{L}$ 中的一个 n 元关系符号，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是 n 个 $\mathcal{L}$-项，则 $R(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 是一个原子 $\mathcal{L}$-公式。
- 如果 t_1 和 t_2 是两个 $\mathcal{L}$-项，则 $t_1 \doteq t_2$ 是一个原子 $\mathcal{L}$-公式。
- 如果一串符号不能通过上面的规则生成，则它不是原子 $\mathcal{L}$-公式。

$\mathcal{L}$-公式就是符合"语法"的符号串。

- 每一个原子 $\mathcal{L}$-公式都是 (最简单的)$\mathcal{L}$-公式。
- 如果 φ 和 ψ 都是 $\mathcal{L}$-公式，则 $(\varphi \wedge \psi)$、$(\varphi \vee \psi)$、$(\varphi \rightarrow \psi)$、$\neg\varphi$ 都是 $\mathcal{L}$-公式。
- 如果 φ 是一个 $\mathcal{L}$-公式，x 是一个个体变元，则 $\forall x\varphi$ 和 $\exists x\varphi$ 都是 $\mathcal{L}$-公式。

有穷次使用以上规则得到的符号串是 $\mathcal{L}$-公式。

令 φ 是一个 $\mathcal{L}$-公式，如果 $\mathcal{L}$-公式 $\forall x\psi$(或者 $\exists x\psi$) 是 φ 的一部分，则称 ψ 是量词 $\forall x$(或者 $\exists x$) 在 φ 中的这次出现的**辖域**。一个个体变元 x 在一个 $\mathcal{L}$-公式 φ 中的一次出现是**约束出现**，如果它的这次出现位于量词符号的后面或者位于 φ 中某个量词 $\forall x$ 或者 $\exists x$ 的辖域内。一个个体变元 x 在一个 $\mathcal{L}$-公式 φ 中的一次出现是**自由出现**，如果它的这次出现不是约束出现。一个个体变元 x 是一个 $\mathcal{L}$-公式 φ 的**自由变元**，如果它在 φ 中至少有一次自由出现；反之，如果它在 φ 中没有自由出现 (包括没出现)，则称 x 是 φ 的**约束变元**。

一个 $\mathcal{L}$-公式 φ 是一个 **$\mathcal{L}$-语句**，如果 φ 没有自由变元。

6.2 语义

6.2.1 原子公式的语义

一个 **$\mathcal{L}$-结构** $\mathfrak{A}$ 包含以下信息:

- 一个**非空**集合 A，涉及的所有个体都在这个集合中，这个集合称为**论域**。
- 对于每一个 $\mathcal{L}$ 中的常元符号 c，指出 A 的一个元素 $c^{\mathfrak{A}}$ 作为 c 的解释。
- 对于每一个 $\mathcal{L}$ 中的 n 元函数符号 F，指出 A 的一个 n 元函数 $F^{\mathfrak{A}}$ 作为 F 的解释。

- 对于每一个 $\mathcal{L}$ 中的 n 元关系符号 R，指出 A 的一个 n 元关系 $R^{\mathfrak{A}}$ 作为 R 的解释。

一个 $\mathcal{L}$-结构直观上是一个世界。

令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，一个 $\mathfrak{A}$ **上的指派**是一个从集合 $\{x_0, x_1, \cdots\}$ 到 $\mathfrak{A}$ 的论域 A 的函数。给定一个指派 ν，每一个 $\mathcal{L}$-项都 (在 $\mathfrak{A}$ 和 ν 之下) **指称**一个元素：

- 常元符号 c 指称 $c^{\mathfrak{A}}$
- 个体变元 x 指称 $\nu(x)$
- 对于一个 n 元函数符号 F 和 n 个 $\mathcal{L}$-项 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，如果 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 分别指称 A 中的元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，则 $F(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 指称 $F^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$。

给定一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 和一个指派 ν，每一个 $\mathcal{L}$-公式都有了真值。记 $\mathfrak{A}, \nu \models \varphi$ 表示 $\mathfrak{A}$ 和 ν 满足 φ。

- $\mathfrak{A}, \nu \models R(t_1, \cdots, t_n) \Leftrightarrow a_1, \cdots, a_n$ 具有 $R^{\mathfrak{A}}$ 关系，其中 $t_1, \cdots, t_n$ 分别指称 A 中的元素 $a_1, \cdots, a_n$。
- $\mathfrak{A}, \nu \models t_1 \doteq t_2 \Leftrightarrow a_1$ 和 a_2 具有等同关系，其中 a_1, a_2 分别是 t_1, t_2 指称的元素。

6.3 量词的语义

令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，ν 是一个 $\mathfrak{A}$ 上的指派。

- $\mathfrak{A}, \nu \models \forall x \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}, \nu[x|a] \models \varphi$ 对任意 $a \in A$ 成立。
- $\mathfrak{A}, \nu \models \exists x \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}, \nu[x|a] \models \varphi$ 对于某个 $a \in A$ 成立。

其中，$\nu[x|a]$ 是一个指派，它与 ν 相同，除了把 x 解释为 a。

令 $\mathcal{L}$ 是一个一阶逻辑形式语言，Γ 是 $\mathcal{L}$-公式组成的集合，φ 是 $\mathcal{L}$-公式。

- $\mathfrak{A}$ 和 v 满足 Γ，记为 $\mathfrak{A}, \nu \models \Gamma$，如果对所有 $\gamma \in \Gamma$ 都有 $\mathfrak{A}, \nu \models \gamma$。
- φ 是 Γ 的一个**语义后承**，记为 $\Gamma \models_{\mathcal{L}} \varphi$，如果对所有 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 和指派 v，若 $\mathfrak{A}, \nu \models \Gamma$，则 $\mathfrak{A}, \nu \models \varphi$。
- φ 是一个**有效式**，记为 $\models_{\mathcal{L}} \varphi$，如果 $\varnothing \models_{\mathcal{L}} \varphi$，即对所有 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 和指派 ν，都有 $\mathfrak{A}, \nu \models \varphi$。

令 $P(x, y_1, \cdots, y_n)$ 表示一个陈述句。如果 x 是 $P(x, y_1, \cdots, y_n)$ 的一个自由变元，那么 $P(x, y_1, \cdots, y_n)$ 表达了 x 的指称具有某种性质。如果是约束变元，那么不表达 x 的指称具有某种性质。在这种情况下，x 可以被统一替换成其他变元，或者通过换个说法消去。

定理 6.1 (合同引理). $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是论域相同的两个 $\mathcal{L}$-结构，ν 和 μ 分别是 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 上的指派。如果：

- 对于在 φ 中出现的所有常元符号 c，$c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$；
- 对于在 φ 中出现的所有函数符号 F，$F^{\mathfrak{A}} = F^{\mathfrak{B}}$；
- 对于在 φ 中出现的所有关系符号 R，$R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}}$；
- 对于在 φ 中出现的所有自由变元 x，$\nu(x) = \mu(x)$。

那么 $\mathfrak{A}, \nu \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B}, \mu \models \varphi$。

一阶逻辑有量词，所有量词中的变元符号指称论域中的元素。二阶逻辑有量词，一部分量词中的变元符号指称论域中的元素，另一部分量词中的变元符号指称论域的子集。三阶逻辑有量词，一部分量词中的变元符号指称论域中的元素，一部分量词中的变元符号指称论域的子集，剩余的量词中的变元符号指称论域的子集组成的集合⋯⋯

7　一阶逻辑理论 (下)：自然演绎系统和可靠性完全性定理

7.1　语形

令 φ 是一个 $\mathcal{L}$-公式，t 是一个 $\mathcal{L}$-项，x 是一个个体变元。t 对于 φ 中的 x **代入自由**，如果对于在 t 中出现的每一个个体变元 y，x 在 φ 中的每一次自由出现都不在量词 $\forall y$ 或者 $\exists y$ 的辖域内。

全程量词消去规则 ($\forall$E)：如果 $\mathcal{L}$-项 t 对于 $\mathcal{L}$-公式 φ 中的 x 代入自由，并且 $\genfrac{}{}{0pt}{}{D}{\forall x\varphi}$ 是一个 $\mathcal{L}$-推演，那么以下是一个 $\mathcal{L}$-推演：

$$\cfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{D}{\forall x\varphi}}{\varphi[t/x]}\ (\forall\mathrm{E})$$

它用到的前提是 D 用到的前提，它的结论是 $\varphi[t/x]$，它的高度是 $h(D)+1$。

存在量词引入规则 ($\exists$I)：如果 $\mathcal{L}$-项 t 对于 $\mathcal{L}$-公式 φ 中的 x 代入自由，并且 $\genfrac{}{}{0pt}{}{D}{\varphi[t/x]}$ 是一个 $\mathcal{L}$-推演，那么以下是一个 $\mathcal{L}$-推演：

$$\cfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{D}{\varphi[t/x]}}{\exists x\varphi}\ (\exists\mathrm{I})$$

它用到的前提是 D 用到的前提，它的结论是 $\exists x\varphi$，它的高度是 $h(D)+1$。

同一律：任何个体都跟自身等同。

莱布尼兹律：如果个体 a 和个体 b 等同，则任意适用于 a 的谓词也适用于 b。

等词引入规则 ($\doteq$I)：对于任意 $\mathcal{L}$-项 t，以下是一个 $\mathcal{L}$-推演：

$$\cfrac{}{t \doteq t}\ (\doteq\mathrm{I})$$

它没有用到的前提，它的结论是 $t \doteq t$，它的高度是 0。

等词消去规则 ($\doteq$E)：如果 $\mathcal{L}$-项 s 和 t 对于 $\mathcal{L}$-公式 φ 中的 x 代入自由，并且 $\genfrac{}{}{0pt}{}{D_1}{s\doteq t}$ 和 $\genfrac{}{}{0pt}{}{D_2}{\varphi[s/x]}$ 都是 $\mathcal{L}$-推演，那么以下是一个 $\mathcal{L}$-推演：

$$\cfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{D_1}{s \doteq t} \qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{D_2}{\varphi[s/x]}}{\varphi[t/x]}\ (\doteq\mathrm{E})$$

它用到的前提是 D_1 和 D_2 用到的前提，它的结论是 $\varphi[t/x]$，它的高度是 $\max\{h(D_1), h(D_2)\}+1$。

全称量词引入规则 ($\forall$I)：如果 z 是 $\mathcal{L}$-的一个个体变元，φ 是一个 $\mathcal{L}$-公式，$\genfrac{}{}{0pt}{}{D}{\varphi[z/x]}$ 是一个 $\mathcal{L}$-推演，并且 z 不在 D 用到的前提中和 φ 中出现，那么以下是一个 $\mathcal{L}$-推演：

$$\cfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{D}{\varphi[z/x]}}{\forall x\varphi}\ (\forall\mathrm{I})$$

它用到的前提是 D 用到的前提，它的结论是 $\forall x\varphi$，它的高度是 $h(D)+1$。

存在量词消去规则 (∃E)：如果 z 是 $\mathcal{L}$-的一个个体变元，φ 是一个 $\mathcal{L}$-公式，$\genfrac{}{}{0pt}{}{D_1}{\exists x\varphi}$ 和 $\genfrac{}{}{0pt}{}{D_2}{\psi}$ 都是 $\mathcal{L}$-推演，并且 z 不在 φ 和 ψ 中出现，也不在除了 $\varphi[z/x], D_2$ 用到的前提中出现，那么以下是一个 $\mathcal{L}$-推演：

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \exists x\varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\varphi[z/x]] \\ D_2 \\ \psi \end{array}}{\psi}\ (\exists\mathrm{E})$$

它用到的前提是 D_1 用到的前提和除了 $\varphi[z/x]$ 以外 D_2 用到的前提，它的结论是 ψ，它的高度是 $\max\{h(D_1), h(D_2)\}+1$。

令 Γ 是一个 $\mathcal{L}$-公式集，φ 是一个 $\mathcal{L}$-公式。

- φ 是 Γ**(在自然演绎系统中) 的 $\mathcal{L}$-语形后承**，记为 $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}}^{ND} \varphi$，如果存在一个 $\mathcal{L}$-推演使得它用到的前提都是 Γ 中的公式并且的结论是 φ。
- φ 是 **(在自然演绎系统中)$\mathcal{L}$-可证的**，如果 $\varnothing \vdash_{\mathcal{L}}^{ND} \varphi$。
- Γ 是 **(在自然演绎系统中)$\mathcal{L}$-一致的**，如果不存在 $\mathcal{L}$-公式 ψ 使得 $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}}^{ND} \psi$ 并且 $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}}^{ND} \neg\psi$。

7.1.1 一个希尔伯特式证明系统

7.2 可靠性和完全性定理

令 $\mathcal{L}$ 是一个一阶逻辑形式语言。

定理 7.1 (**强可靠性定理**). *对于任意 $\mathcal{L}$-公式集 Γ 和 $\mathcal{L}$-公式 φ，如果 $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}}^{ND} \varphi$，则 $\Gamma \models_{\mathcal{L}} \varphi$。*

定理 7.2 (**强完全性定理**). *对于任意 $\mathcal{L}$-公式集 Γ 和 $\mathcal{L}$-公式 φ，如果 $\Gamma \models_{\mathcal{L}} \varphi$，则 $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}}^{ND} \varphi$。*

8 一阶逻辑的使用

8.1 汉语中的量化现象

罗素式的分析："the φ is ψ"的意思是"恰好有一个东西 φ，而且这个东西是 ψ"为真。
"The cat I own is fat": $\exists x(C(x) \wedge O(i,x) \wedge \forall y((C(y) \wedge O(i,y)) \to y = x) \wedge F(x))$。
罗素式分析的一个问题是，带摹状词的句子总是有真假。

8.2 一阶逻辑的极限

定理 8.1. 令 P 是一个一元谓词。不存在一个一阶逻辑句子 φ 使得对于任意可以解释 φ 中使用的非逻辑符号以及谓词 P 的结构 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow P^{\mathfrak{A}}$ 是无穷的。

定理 8.2. 一阶逻辑具有**紧致性**：对任何公式集 Γ，如果每个有穷子集都存在一个结构满足它，则也有一个结构满足 Γ 全体。

9 计算问题

10 逻辑的界限：不完备性

10.1 希尔伯特计划

一个理论 T 是**一致的** $\iff$ 不存在一个句子 φ 使得 $T \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$。

一个理论 T 是**完备的** $\iff$ 对于任意句子 φ，$T \vdash \varphi$ 或 $T \vdash \neg\varphi$。

希尔伯特计划：为整个数学建立一个完备并一致的公理化理论，并形式化地证明它的一致性。

10.2 形式化算术

一阶算术语言 $\mathcal{L}_A$ 包含以下非逻辑符号：

- 常元符号：0
- 一元函数符号：S(后继函数)
- 二元函数符号：$+$，$\times$

皮亚诺算术 (PA) 是 $\mathcal{L}_A$ 包含以下公理的理论：

- $\forall x \neg(S(x) = 0)$
- $\forall x \forall y (S(x) = S(y) \to x = y)$
- $\forall x (x + 0 = x)$
- $\forall x \forall y (x + S(y) = S(x + y))$
- $\forall x (x \times 0 = 0)$
- $\forall x \forall y (x \times S(y) = x \times y + x)$
- $(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(S(x)))) \to \forall x \varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 是 $\mathcal{L}_A$ 中自由变元为 x 的公式。

以下公式均可以在 PA 中证明：

- $\forall x \forall y (x + y = y + x)$
- $\forall x \forall y \forall z ((x + y) + z = x + (y + z))$
- $\forall x \forall y (x \times y = y \times x)$
- $\forall x \forall y \forall z ((x \times y) \times z = x \times (y \times z))$
- $\forall x \forall y \forall z (x \times (y + z) = x \times y + x \times z)$
- $\cdots$

10.3 哥德尔编码

对于每个自然数 n，其**标准数**记作 $\overline{n}$，定义为：$\overline{n} := \underbrace{S(S(\cdots S}_{n\text{次}}(0)\cdots))$。

给定符号串 $\langle s_1, \cdots, s_n\rangle$ 对应的编码序列 $\langle a_1, \cdots, a_n\rangle$，其 Gödel 编码为：

$$\#(s_1, \cdots, s_n) := 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot \cdots \cdot p_n^{a_n} \tag{3}$$

其中 p_n 是第 n 个素数。

一个 $\mathcal{L}_A$ 中的公式 φ 的**名字**，$\ulcorner\varphi\urcorner$，被定义为

$$\ulcorner\varphi\urcorner := \overline{\#\varphi} \tag{4}$$

10.4 第一不完备性定理

对于任意只有一个自由变元的 $\mathcal{L}_A$ 中的公式 $\varphi(x)$，它的**对角化**是 $\mathcal{L}_A$ 中的句子 $\varphi(\ulcorner\varphi\urcorner)$。对于任意自然数 n 和 m，

$$diag(n,m) \Longleftrightarrow m = \#(\varphi(\ulcorner\varphi\urcorner)) \text{ 其中}\#(\varphi) = n \tag{5}$$

存在 $\mathcal{L}_A$ 中的公式 $Diag(x,y)$ 使得对任何自然数 n 和 m，

- 如果 $diag(n,m)$，那么 $PA \vdash Diag(\overline{n},\overline{m}) \wedge \exists! x Diag(\overline{n},x)$；
- 如果 $\neg diag(n,m)$，那么 $PA \vdash \neg Diag(\overline{n},\overline{m})$。

我们称 diag 关系是 PA 中可表示的。

引理 10.1 (固定点引理). 对于任意 $\mathcal{L}_A$ 中只有一个自由变元的公式 $\varphi(x)$，存在一个句子 ψ，使得

$$PA \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner\psi\urcorner) \tag{6}$$

给定一个 $\mathcal{L}_A$ 中的公式序列 $\langle s_1, s_2, \cdots, s_n\rangle$，其 Gödel 编码定义为：

$$Code(s_1, s_2, \cdots, s_n) = 2^{\#(s_1)} \cdot 3^{\#(s_2)} \cdots p_n^{\#(s_n)} \tag{7}$$

其中 p_n 是第 n 个素数。

对于任意自然数 n 和 m，

- prf(n, m) 当且仅当 n 是一个编码为 m 的句子在 PA 中的证明的编码。
- prov(m) 当且仅当存在 n 使得 prf(n, m)。

实际上，存在 $\mathcal{L}_A$ 中的公式 Prf(x, y) 使得对任意自然数 n 和 m，

- 如果 $prf(n,m)$，那么 $PA \vdash Prf(\overline{n},\overline{m})$；

- 如果 $\neg prf(n,m)$，那么 $PA \vdash \neg Prf(\overline{n},\overline{m})$。

我们称 prf 是在 PA 中可表示的。

令 Prov(y) 为 $\exists x Prf(x,y)$。**哥德尔句** G 是 $\mathcal{L}_A$ 中的句子，满足

$$PA \vdash G \longleftrightarrow \neg Prov(\ulcorner G \urcorner) \tag{8}$$

引理 10.2. *假设 PA 是一致的，那么 $PA \nvdash G$。*

定理 10.3. *G 是一个真命题。*

推论：如果 PA 是一致的，那么 PA 不能证明所有关于算术的真命题。

一个 $\mathcal{L}_A$ 中的理论 T 是 **ω-一致的**当且仅当对于任意 $\mathcal{L}_A$ 中的公式 $\varphi(x)$，若对于每一个自然数 n，$T \vdash \varphi(\overline{n})$，则 $T \nvdash \exists x \neg\varphi(x)$。事实上，如果 T 是 ω-一致的，那 T 是一致的。存在一致但不 ω-一致的理论。

定理 10.4. *假设 PA 是 ω-一致的，那么 $PA \nvdash \neg G$。因此，如果 PA 是 ω-一致的，那么 PA 不是完备的。*

$not(n)$ 是如下自然数上的函数：如果 $n = \#\varphi$ 对于某个公式 φ，那么 $not(n) = \#(\neg\varphi)$。Rprf(x,y) 是自然数上的如下关系

$$Rprf(x,y) = [prf(x,y) \wedge \forall z < x \neg prf(z, not(y))] \tag{9}$$

意思是 x 是编码为 y 的公式的一个 PA 中的证明的编号，并且没有比这个证明更短的对于 $\neg\varphi$ 的证明。

事实上，Rprf(x,y) 在 PA 中可被一个公式 RPrf(x,y) 表示。令 RProv(y) 为 $\exists x Rprf(x,y)$。PA 的**罗塞尔句**是一个 $\mathcal{L}_A$ 中的句子 R，满足

$$PA \vdash R \longleftrightarrow \neg RProv(\ulcorner R \urcorner) \tag{10}$$

定理 10.5 (Rosser 不完备性定理). *如果 PA 是一致的，那么 PA 是不完备的。*

定理 10.6 (第一完备性定理). *任意满足以下三个条件的理论 T 都是不完备的。*

- *T 是一致的。*
- *T 是递归可公理化的*
- *T 包含足够多初等算术公理 (例如 PA 的公理)。*

10.5 第二不完备性定理

定义

$$Con(PA) := \neg Prov(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \tag{11}$$

表示“不存在 $0 = 1$ 的证明”。

定理 10.7. *如果 PA 是一致的，那么 $PA \nvdash Con(PA)$。*

定理 10.8 (**第二不完备性定理**)**.** *如果理论 T 满足以下三个条件，那么 T 不能证明自身的一致性。*

- *T 是一致的。*
- *T 是递归可公理化的*
- *T 包含足够多初等算术公理 (例如 PA 的公理)。*

11 无穷与集合

11.1 无穷的大小

集合 A 和集合 B **等势** $(A \sim B)$ 当且仅当存在一个二者元素之间的一一对应。集合 A 的势小于等于集合 B 的势 $(A \preceq B)$ 当且仅当 A 和 B 的一个子集等势。集合 A 的势小于集合 B 的势 $(A \prec B)$ 当且仅当 $A \preceq B$ 但 $B \nsim A$。

对于任意集合 A，A 的**幂集**是所有 A 的子集组成的集合，记为 $P(A)$。

定理 11.1 (**康托定理**). *对于任意集合 A，$A \prec P(A)$。*

因此，没有最大的无穷：$\mathbb{N} \prec P(\mathbb{N}) \prec P(P(\mathbb{N})) \cdots$。

定理 11.2 (**连续统假设**). *不存在集合 x 使得 $\mathbb{N} \prec x \prec \mathbb{R}$。*

11.2 什么是集合

一阶语言 $\mathcal{L}_\in$ 包含所有的一阶逻辑符号和一个二元谓词 $\in$。

朴素概括公理：对于任意 $\mathcal{L}_\in$ 中的公式 $\varphi(x)$，$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$。(对于任意性质 φ，$\{x|\varphi(x)\}$ 是一个集合)

定理 11.3 (**罗素悖论**). *朴素概括公理不一致。*

11.3 ZF 集合论

在元语言中，我们称 $\{x|\varphi(x)\}$ 是一个满足 φ 的对象组成的类。一个类是一个**集合**当且仅当 $\exists y(\forall x(x \in y \leftrightarrow \varphi(x)))$ 可证。并非所有的类都是集合，比如 $\{x|x \notin x\}$。

外延公理：$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$ (拥有相同元素的对象是等同的)

假设外延公理，那么

- 没有无素
- 如果 $\{x|\varphi(x)\}$ 是一个集合，那么这个集合是唯一的

分离公理：$\forall x, z_1, \cdots, z_n \exists y \forall v(v \in y \leftrightarrow v \in x \wedge \varphi(v, z_1, \cdots, z_n))$，其中 y 不在 φ 中自由出现 (一个集合的子类也是集合)

假设分离公理，那么

- $\varnothing = \{x|x \notin x\}$ 是集合
- $x \cap y = \{v|v \in x \wedge v \in y\}$ 是集合
- $x - y = \{v|v \in x \wedge v \notin y\}$ 是集合

- $V = \{x|x = x\}$ 不是集合

配对公理：$\forall x \forall y \exists z \forall v(v \in z \leftrightarrow v = x \vee v = y)$ (对任意集合 x 和 y，$\{v|v = x \vee v = y\}$ 是一个集合)

并集公理：$\forall x \exists y \forall v(v \in y \leftrightarrow \exists z(v \in z \wedge z \in x))$ (对任意集合 x，$\bigcup x = \{z|\exists v(v \in x \wedge z \in v)\}$ 是一个集合)

假设配对公理和并集公理

- 对于任意 $x_1, \cdots, x_n$，$\{x_1, \cdots, x_n\}$ 是一个集合
- 对于任意 x 和 y，$x \cup y = \{z|z \in x \vee z \in y\}$ 是一个集合
- 假设分离公理，对于任意的 x，$\{v|v \notin x\}$ 不是一个集合

幂集公理：$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \forall v \in z(v \in x))$ (对任意集合 x，$P(x)$ 是一个集合)

良基公理：$\forall x(\exists y(y \in x) \rightarrow \exists z(z \in x \wedge \neg \exists w(w \in z \wedge w \in x)))$ (每个非空集合都有一个 $\in$-最小元)

假设上述所有公理

- 如果 $x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n$，那么 $x_n \notin x_1$
- 对于任意集合 x，$\{y|x \in y\}$ 不是一个集合

证明. (1) 假设 $x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n$，根据配对公理和并集公理，$X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ 是一个集合。X 非空，根据良基公理，存在一个 a 使得 $a \in X$ 并且 $a \cap X = \varnothing$。而 a 只能是 x_1，因此 $x_n \notin x_i$。

(2) 假设 $\{y|x \in y\}$ 是一个集合 a，那么 $\{x, a\}$ 是一个集合。所以有 $a \in \{x, a\} \in a$，矛盾。 □

11.4 关系和函数

对于任意 x 和 y，$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$，被称作 x 和 y 的**有序对**。(x, y) 是集合。对于任意 $x_1, \cdots, x_{n+1}$，$(x_1, \cdots, x_{n+1}) = ((x_1, \cdots, x_n), x_{n+1})$。

对于任意集合 x_1, y_1, x_2, y_2，$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ 且$y_1 = y_2$。

卡氏乘积 $x \times y = \{(u, v)|u \in x \wedge v \in y\}$。对于任意 x 和 y，$x \times y$ 是集合。

集合 R 是一个 (二元) **关系**当且仅当 R 中的元素都是有序对。对于任意关系 R 和集合 A，

- $dom(R) = \{x|\exists y(xRy)\}$
- $ran(R) = \{x|\exists y(yRx)\}$
- $R^{-1} = \{\langle x, y\rangle|yRx\}$

- $R \upharpoonright A = \{\langle a, y\rangle \in R | a \in A\}$

- $R[A] = \{z | \exists y \in A(yRz)\}$

如果有 $dom(R) \cup ran(R) \subseteq A$，称 R 是 A 上的关系。可以证明以上五个都是集合。

对于任意两个关系 R 和 S，$R \circ S = \{\langle x, z\rangle | \exists y(xRy \wedge ySz)\}$，被称作 R 和 S 的复合。$R \circ S$ 是集合。

一个集合 f 是一个**函数**当且仅当

- f 是一个关系

- 对于任意 $x \in dom(f)$，存在唯一的 y(记作 $f(x)$) 使得 xfy。

对于任意集合 x，$id_x = \{(a, a) | a \in x\}$。

给定任意两个函数 f 和 g

- 如果 $dom(f) = dom(g)$ 并且对于任意 $x \in dom(f)$，$f(x) = g(x)$，则 $f = g$。

- $f \circ g$ 是函数

- 对于任意 $x \in dom(f \circ g)$，$(f \circ g)(x) = f(g(x))$。

11.5 自然数

对于任意集合 x，$S(x) = x \cup \{x\}$，称作 x 的后继。一个集合 I 是一个**归纳集**当且仅当

- $0 \in I$;

- 对于任意 $x \in I$，$S(x) \in I$。

无穷公理：$\exists x(\varnothing \in x \wedge \forall y \in x(y \cup \{y\} \in x))$ (存在一个归纳集)

对于任意类 $X, \bigcap X = \{y | \forall z(z \in X \to y \in z)\}$。$\omega = \bigcap\{I | I$ 是一个归纳集$\}; 0 = \varnothing$。

命题 11.4. *ω 是集合。*

命题 11.5. *ω 是 $\subseteq$ -最小的归纳集。*

集合 n 是一个**自然数**当且仅当 $n \in \omega$。

定理 11.6 (数学归纳法). $[\varphi(0) \wedge \forall n(\varphi(n) \to \varphi(S(n)))] \to \forall n \in \omega\varphi(n)$

命题 11.7. *每个自然数的元素都是自然数。*

11.6 势