概率论和随机过程

周无寒
北京大学信息科学技术学院

2025 年 6 月 11 日

摘要

本文来自北京大学信息科学技术学院杨川川和马黎黎 2025 年春季学期的概率论和随机过程。概率论部分的教材是茆诗松、程依明和濮晓龙的《概率论与数理统计教程》，随机过程部分的教材是陆大絟和张颢的《随机过程及其应用》。

目录

1 随机过程基本概念

1.1 定义

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, T 为参数集 $T \subset \mathbb{R}$, 若对任意 $t \in T$, 均有定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一个随机变量 $X(t,\omega), (\omega \in \Omega)$ 与之对应，则称 $X(t,\omega)$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一个**随机过程**，记作 $X = \{X(t,\omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$，简记为 $X = \{X_t, t \in T\}$ 或 $X(t)$ 或 X_t。若 T 为可数集，随机过程 $X(t)$ 也称为**随机序列**。

对每一个固定的 t，$X(t,\omega)$ 是一个随机变量，$X(t)(t \in T)$ 所有可能取值的集合称为 $X(t,\omega)$ 的**样本空间**，记作 S，S 中的元素称为**状态**。对每一个 $\omega_0 \in \Omega$，$X(t,\omega_0)$ 是定义在 T 上的函数，记为称为 $x(t,\omega_0)$，称为随机过程的一个**样本函数**或**样本轨道**。

1.2 分布函数

设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一个随机过程，固定 n 个时刻 $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$，得到 n 维分布函数为

$$F(t_1, t_2, \cdots, t_n; x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X(t_1) \leqslant x_1, X(t_2) \leqslant x_2, \cdots, X(t_n) \leqslant x_n) \tag{1}$$

所有一维分布函数，二维分布函数，……，n 维分布函数的全体

$$F = \{F(t_1, t_2, \cdots, t_n; x_1, x_2, \cdots, x_n) | n \in \mathbb{N}, t_i \in T, x_i \in \mathbb{R}\} \tag{2}$$

称为随机过程 $X(t)$ 的**有限维分布函数族**。

1.3 数字特征

设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一个随机过程，对任意 $t \in T$，$X(t)$ 是一个随机变量，如果 $E[X(t)]$ 存在，记为 $m_X(t)$，为 $X(t)$ 的**均值函数**。如果一维分布函数为 $F(t;x)$，则

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F(t;x), \quad t \in T \tag{3}$$

对任意 $s, t \in T$，$X(s), X(t)$ 是两个随机变量，如果 $E[X(s)X(t)]$ 存在，记为 $R_X(s,t)$，为 $X(t)$ 的**相关函数**。如果 $Cov(X(s), X(t))$ 存在，记为 $C_X(t,s)$，为 $X(t)$ 的**协方差函数**。

$$\begin{aligned} C_X(s,t) &= Cov(X(s), X(t)) = E[(X(s) - m_X(s))(X(t) - m_X(t))] \\ &= E[X(s)X(t)] - m_X(s)m_X(t) = R_X(s,t) - m_X(s)m_X(t), \quad t, s \in T \end{aligned} \tag{4}$$

如果 $D[X(t)]$ 存在，记为 $D_X(t)$，为 $X(t)$ 的**方差函数** $(\sigma_X^2(t))$。

$$D_X(t) = D[X(t)] = E\left[(X(t) - m_X(t))^2\right] = C_X(t,t), \quad t \in T \tag{5}$$

如果 $E[X(t)^2]$ 存在，记为 $\Phi_X(t,t)$，为 $X(t)$ 的**均方值函数**。

$$\Phi_X(t,t) = R_X(t,t), \quad t \in T \tag{6}$$

若 $\{X(t), t \in T\}$ 和 $\{Y(t), t \in T\}$ 是两个随机过程，称 $\{X(t), Y(t), t \in T\}$ 为**二维随机过程**。对于任意 $m \geqslant 1, n \geqslant 1, t_1, t_2, \cdots, t_m \in T, t_1', t_2', \cdots, t_n' \in T, (X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_m), Y(t_1'), Y(t_2'), \cdots, Y(t_n'))$ 是 $m+n$ 维随机变量，$\mathbf{m+n}$ **维分布函数**为

$$\begin{aligned} &F(t_1, t_2, \cdots, t_m; x_1, x_2, \cdots, x_m; t_1', t_2', \cdots, t_n'; y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ &= P(X(t_1) \leqslant x_1, X(t_2) \leqslant x_2, \cdots, X(t_m) \leqslant x_m, Y(t_1') \leqslant y_1, Y(t_2') \leqslant y_2, \cdots, Y(t_n') \leqslant y_n) \end{aligned} \tag{7}$$

两个随机过程**相关独立**如果

$$\begin{aligned} &F(t_1, t_2, \cdots, t_m; x_1, x_2, \cdots, x_m; t_1', t_2', \cdots, t_n'; y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ &= F_X(t_1, t_2, \cdots, t_m; x_1, x_2, \cdots, x_m) F_Y(t_1', t_2', \cdots, t_n'; y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{aligned} \tag{8}$$

对任意 $s, t \in T$，$X(s), Y(t)$ 是两个随机变量，如果 $E[X(s)Y(t)]$ 存在，记为 $R_{XY}(s,t)$，为**互相关函数**。如果 $Cov(X(s), Y(t))$ 存在，记为 $C_{XY}(s,t)$，为**互协方差函数**。

$$C_{XY}(s,t) = R_{XY}(s,t) - m_X(s) m_Y(t), \quad s, t \in T \tag{9}$$

$X(t)$ 和 $Y(t)$ 不相关，如果

$$C_{XY}(s,t) = 0 \quad \text{或者} \quad R_{XY}(s,t) = m_X(s) m_Y(t) \quad s, t \in T \tag{10}$$

设 $\{X(t), t \in T\}$ 和 $\{Y(t), t \in T\}$ 是定义在同一概率空间上的两个实随机过程，令 $Z(t) = X(t) + iY(t)$，则称 $\{Z(t), t \in T\}$ 为**复随机过程**。下面是复随机过程的数字特征。

$$m_Z(t) = E[Z(t)] = m_X(t) + i m_Y(t), \quad t \in T \tag{11}$$

$$D_Z(t) = D[Z(t)] = E[|Z(t) - m_Z(t)|^2] = D_X(t) + D_Y(t), \quad t \in T \tag{12}$$

$$R_Z(s,t) = E[\overline{Z(s)} Z(t)], \quad s, t \in T \tag{13}$$

$$\begin{aligned} C_Z(s,t) &= Cov(Z(s), Z(t)) = E[\overline{(Z(s) - m_Z(s))}(Z(t) - m_Z(t))] \\ &= R_Z(s,t) - \overline{m_Z s} m_Z(t), \quad s, t \in T \end{aligned} \tag{14}$$

$$\Phi_Z(t) = E|Z(t)|^2, \quad t \in T \tag{15}$$

2 Poisson 过程

2.1 定义与概率分布

定义 2.1. 如果随机过程 $N(t), t \geqslant 0$ 表示时间段 $[0,t]$ 内发生的某种事件的总数，则称随机过程 $N(t)$ 为**计数过程**。

从定义得计数过程满足

1. $N(t) \in \mathbb{N}_+$;
2. $\forall s < t, N(s) \leqslant N(t)$;
3. $N(t) - N(s)$ 表示时刻 s 到时刻 t 之间发生的事件次数。

定义 2.2. 对于随机过程 $X(t), t \in \mathbb{R}, \forall t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4, t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$，有 $X(t_4) - X(t_3)$ 与 $X(t_2) - X(t_1)$ 统计独立，称该过程为**独立增量过程**。

定义 2.3. 对于随机过程 $X(t), t \in \mathbb{R}$，如果增量 $X(t) - X(s)$ 的分布仅仅依赖于 $t - s$，称该过程为**平稳增量过程**或**齐次 (时齐) 增量过程**。

定义 2.4. 计数过程 $N(t)$ 如果满足以下条件，则称 $N(t)$ 为 **Poisson 过程**:

1. $N(0) = 0$;
2. $N(t)$ 是独立增量过程;
3. $N(t)$ 是平稳增量过程;
4. $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(N(t+\Delta t)-N(t) \geqslant 2)}{P(N(t+\Delta t)-N(t)=1)} = 0$。

或者也可将第 4 个条件改为

- $P(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta t \to 0$
- $P(N(t+\Delta t) - N(t) \geqslant 2) = o(\Delta t), \quad \Delta t \to 0$

命题 2.1.

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{16}$$

证明. 令 $N(t)$ 的母函数为 $G(z,t)$，即

$$G(z,t) = E\left(z^{N(t)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(N(t) = k) \tag{17}$$

$$\begin{aligned} G(z,t+\Delta t) - G(z,t) &= E\left(z^{N(t+\Delta t)}\right) - E\left(z^{N(t)}\right) = E\left(z^{N(t)}\left(z^{N(t+\Delta t)-N(t)} - 1\right)\right) \\ &= E\left(z^{N(t)}\right) E\left(z^{N(t+\Delta t)-N(t)} - 1\right) \quad (\text{独立增量过程}) \\ &= E\left(z^{N(t)}\right) E\left(z^{N(\Delta t)} - 1\right) = G(z,t)(G(z,\Delta t) - 1) \end{aligned} \tag{18}$$

首先处理 $P(N(\Delta t)=0)$。令 $P_0(s)=P(N(s)=0)$，则 $\forall t,s\geqslant 0$，有

$$\begin{aligned}P_0(t+s)&=P(N(t+s)=0)=P(N(t+s)-N(s)=0)P(N(s)=0)\quad\text{(独立增量)}\\&=P_0(t)P_0(s)\quad\text{(平稳增量)}\end{aligned}\tag{19}$$

由分析中的熟知结论得

$$P_0(t)=e^{-\lambda t},\quad \lambda\geqslant 0\text{为确定性参数}\tag{20}$$

因此

$$\frac{P(N(\Delta t)=0)-1}{\Delta t}=-\lambda+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\tag{21}$$

$$\frac{1-P(N(\Delta t)=0)}{\Delta t}=\frac{P(N(\Delta t)=1)}{\Delta t}\left(1+\frac{P(N(\Delta t)\geqslant 2)}{P(N(\Delta t)=1)}\right)\tag{22}$$

令 $\Delta t\to 0$ 并由条件 4 知

$$\frac{P(N(\Delta t)=1)}{\Delta t}\longrightarrow\lambda\tag{23}$$

$$\begin{aligned}&\frac{G(z,t+\Delta t)-G(z,t)}{\Delta t}=G(z,t)\frac{G(z,\Delta t)-1}{\Delta t}\\&=G(z,t)\left(\frac{P(N(\Delta t)=0)-1}{\Delta t}+z\frac{P(N(\Delta t)=1)}{\Delta t}\left(1+\sum_{k\geqslant 2}z^{k-1}\frac{P(N(\Delta t)=k)}{P(N(\Delta t)=1)}\right)\right)\end{aligned}\tag{24}$$

考虑母函数作为 z 的幂级数，收敛域为 $|z|\leqslant 1$，因此当 $\Delta t\to 0$ 时

$$\left|\sum_{k\geqslant 2}z^{k-1}\frac{P(N(\Delta t)=k)}{P(N(\Delta t)=1)}\right|\leqslant\sum_{k\geqslant 2}\frac{P(N(\Delta t)=k)}{P(N(\Delta t)=1)}=\frac{P(N(\Delta t)\geqslant 2)}{P(N(\Delta t)=1)}\longrightarrow 0\tag{25}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(z,t)=G(z,t)\lambda(z-1)\tag{26}$$

且初值 $G(z,0)=1$，因此

$$G(z,t)=e^{\lambda t(z-1)}=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}z^k\tag{27}$$

□

2.2 数字特征

命题 2.2.

$$m_N(t)=\lambda t,\quad t\geqslant 0\tag{28}$$

$$D_N(t)=\lambda t,\quad t\geqslant 0\tag{29}$$

$$C_N(s,t)=\lambda\min(s,t),\quad s,t\geqslant 0\tag{30}$$

$$R_N(s,t)=\lambda^2 st+\lambda\min(s,t),\quad s,t\geqslant 0\tag{31}$$

证明. 不妨设 $s \leqslant t$，则

$$\begin{aligned} R_N(s,t) &= E[N(s)N(t)] = E[N(s)(N(t)-N(s))] + E[N(s)^2] \\ &= E[N(s)]E[N(t)-N(s)] + D[N(s)] + (E[N(s)])^2 = \lambda^2 st + \lambda s \end{aligned} \tag{32}$$

□

2.3 到达时间与时间间隔分布

命题 2.3. 首次到达时间服从参数为 λ 的指数分布，即

$$F_{T_1}(t) = P(T_1 \leqslant t) = 1 - P(N(t)=0) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0 \tag{33}$$

$$f_{T_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0 \tag{34}$$

$$E[T_1] = \frac{1}{\lambda} \tag{35}$$

$$D[T_1] = \frac{1}{\lambda^2} \tag{36}$$

定理 2.1. *Poisson* 过程的事件间隔时独立同分布的随机变量，都服从参数为 λ 的指数分布。

命题 2.4. 设 T_n 为 *Poisson* 过程的第 n 个到达时间，则 T_n 服从 Γ 分布，即

$$f_{T_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{37}$$

$$E[T_n] = \frac{n}{\lambda} \tag{38}$$

$$D[T_n] = \frac{n}{\lambda^2} \tag{39}$$

证明. $t \geqslant 0$ 时

$$F_{T_n}(t) = P(T_n \leqslant t) = P(N(t) \geqslant n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \tag{40}$$

$$f_{T_n}(t) = -\lambda \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} + \lambda \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!} e^{-\lambda t} = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \tag{41}$$

□

先考虑已知 $[0,t]$ 内发生一次事件的情况，该事件发生时刻 S_1 的分布为

$$F_{S_1|N(t)=1}(s) = P(S_1 \leqslant s | N(t)=1) = \frac{P(N(s)=1)P(N(t-s)=1)}{P(N(t)=1)} = \frac{s}{t} \tag{42}$$

命题 2.5. 如果 $[0,t]$ 内发生 n 次事件，第 i 次事件发生时刻为 S_i，设 $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant t$，且取 h_k 足够小，使得 $t_k + h_k \leqslant t_{k+1}$，则

$$\begin{aligned}
&P(t_1 \leqslant S_1 \leqslant t_1 + h_1, \cdots, t_n \leqslant S_n \leqslant t_n + h_n | N(t) = n) \\
&= \frac{P(N(h_1) = 1)P(N(h_2) = 1) \cdots P(N(h_n) = 1)P(N(t - (h_1 + h_2 + \cdots + h_n)) = 0)}{P(N(t) = n)} \\
&= \frac{n!}{t^n} h_1 h_2 \cdots h_n
\end{aligned} \tag{43}$$

2.4 叠加与抽样

命题 2.6. 设 $N_1(t), N_2(t)$ 是两个独立的 *Poisson* 过程，参数分别为 λ_1, λ_2，则 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ 也是一个 *Poisson* 过程，参数为 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$。

证明. 考虑母函数

$$G_{N_1(t)+N_2(t)}(z,t) = E(z^{N_1(t)+N_2(t)}) = E(z^{N_1(t)})E(z^{N_2(t)}) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)t(z-1)} \tag{44}$$

□

命题 2.7. 如果 $\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)}$ 分别是 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 的第一个到达时间，则

$$P(\tau_1^{(1)} < \tau_1^{(2)}) = \int_0^{+\infty} \int_0^{t_y} \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 t_x - \lambda_2 t_y} \mathrm{d}t_x \mathrm{d}t_y = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \tag{45}$$

如果 $\tau_k^{(1)}, \tau_1^{(2)}$ 分别是 $N_1(t)$ 的第 k 个到达时间和 $N_2(t)$ 的第 1 个到达时间，则

$$P(\tau_k^{(1)} < \tau_1^{(2)}) = \int_0^{+\infty} \int_0^{t_y} \frac{(\lambda_1 t_x)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 t_x - \lambda_2 t_y} \mathrm{d}t_x \mathrm{d}t_y = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \tag{46}$$

命题 2.8. 设 $N(t)$ 是参数为 λ 的 *Poisson* 过程，每次发生的事件有 A、B 两种类型，且每个事件独立于其他事件。当每次发生事件时，A 的概率为 p，B 的概率为 q，设 $N_A(t)$ 和 $N_B(t)$ 分别是事件 A 和事件 B 的计数过程，则 $N_A(t)$ 和 $N_B(t)$ 分别是参数为 λp 和 λq 的 *Poisson* 过程，且是独立的。

证明.

$$\begin{aligned}
P(N_1(t) = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(N(t) = n) P(N_1(t) = k | N(t) = n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{(\lambda p t)^k}{k!} e^{-\lambda p t}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
P(N_1(t) = k, N_2(t) = j) &= P(N(t) = k + j) P(N_1(t) = k | N(t) = k + j) \\
&= P(N_1(t) = k) P(N_2(t) = j), \quad k, j = 0, 1, 2, \cdots
\end{aligned} \tag{48}$$

□

推论 2.1. 假设每次发生的事件有 K 种，且每次发生事件时，第 i 种事件的概率为 p_i，则 $N_i(t)$ 是参数为 λp_i 的 *Poisson* 过程，且 $N_1(t), N_2(t), \cdots, N_K(t)$ 是独立的。

2.5 复合 Poisson 过程

定义 2.5. 设 $N(t)$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程，$\{Y_n\}, n = 1, 2, 3, \cdots$, 是一族独立同分布的随机变量，且 Y_n 与 $N(t)$ 独立，则称随机过程 $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_n$ 为**复合 Poisson 过程**。

当 Y_n 是常数时，复合 Poisson 过程退化为 Poisson 过程。

$$E[X(t)] = E\left[E\left[nY_n|N(t) = n\right]\right] = \lambda t E[Y_n] \tag{49}$$

3 离散时间 Markov 链

3.1 定义

定义一步转移概率和一步转移概率矩阵为

$$p_{ij}(n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \tag{50}$$

$$\mathbf{P}(n) = (p_{ij}(n)) = \begin{pmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \cdots & p_{1m}(n) \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & \cdots & p_{2m}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1}(n) & p_{m2}(n) & \cdots & p_{mm}(n) \end{pmatrix} \tag{51}$$

特别约定 $\mathbf{P}^{(0)}(n) = \mathbf{I}$。

如果 Markov 链的一步转移概率始终与起始时刻 n 无关，记为 p_{ij}，则称该 Markov 链为**齐次 Markov 链**。

3.2 Chapman-Kolmogorov 方程

命题 3.1. *对于任意时刻 $r < s < t$，有 C-K 方程*

$$\begin{aligned} P_{ij}(r,t) = P(X_t = j | X_r = i) &= \sum_{k \in E} P(X_t = j | X_s = k) P(X_s = k | X_r = i) \\ &= \sum_{k \in E} P_{ik}(r,s) P_{kj}(s,t) \end{aligned} \tag{52}$$

如果是齐次的，则

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)} \tag{53}$$

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n \tag{54}$$

记 $p^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \cdots, p_m^{(0)})$ 为初始概率分布，则 X_n 的分布为

$$p^{(n)} = p^{(0)} \mathbf{P}^n \tag{55}$$

3.3 状态的分类

定义 3.1. 设 $i, j \in E$ 是 Markov 链的两个状态，如果存在 $n > 0$，使得

$$p_{ij}^{(n)} > 0 \tag{56}$$

则称状态 i **可达** j，记作 $i \to j$，否则为 i **不可达** j，记作 $i \nrightarrow j$。

若 $i \to j$ 且 $j \to k$，则 $i \to k$。

定义 3.2. 设 $i,j\in E$ 是 Markov 链的两个状态，如果存在 $n,m>0$，使得

$$p_{ij}^{(n)}>0 \quad p_{ji}^{(m)}>0 \tag{57}$$

则称状态 i 和 j 是**相通**的，记作 $i\leftrightarrow j$。

相通具备对称性和传递性。

定义 3.3. 如果任意 $i\in S, j\notin S$，$i\nrightarrow j$，则称 S 是**闭集**。如果单状态集 $S=\{i\}$ 是闭集，则称 i 是**吸收态**，此时 $P_{ii}=1$。

S 本身就是一个完整的 Markov 链，即一步转移矩阵对应于 S 以外各状态的行和列都删去，剩下的矩阵仍然是随机矩阵，$\forall i\in S, \sum_{j\in S}P_{ij}=1$。

定义 3.4. 如果子集 $C\subset E$ 满足

$$\{S\subseteq C, S\text{是闭集}\}\Longleftrightarrow\{S=\varnothing\text{或}S=C\} \tag{58}$$

则称子集 C **不可约**。如果 E 本身不可约，则称该 Markov 链不可约，否则为可约的。

定义 3.5. 状态 i 的周期 d_i 定义为

$$d_i=\gcd\{n:P_{ii}^{(n)}>0\} \tag{59}$$

如果 $d_i=1$，则称状态 i **非周期**，如果 $d_i>1$ 称状态 i 为**周期态**。

3.4 状态的常返性

定义 3.6. 设 $j\in E$ 是 Markov 链的一个状态，定义从时刻 $n=0$ 出发到达状态 j 的**首达时间**为

$$\tau_j=\inf\{n\geqslant 1:X_n=j\} \tag{60}$$

如果 $\{n\geqslant 1:X_n=j\}$ 为空集，定义 $\tau_j=+\infty$。

定义 3.7. 设 $i,j\in E$ 是两个状态，则经 n 步从 i 到 j 的**首达概率**为

$$f_{ij}^{(n)}=P(\tau_j=n|X_0=i) \tag{61}$$

令 f_{ij} 为从状态 i 出发迟早到达状态 j 的概率，则

$$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}\leqslant 1 \tag{62}$$

定义 3.8. 如果

$$f_{ii}=1 \tag{63}$$

则称状态 i 是**常返态**，否则称状态 i 是**滑过态**或者**非常返态**。

对于常返态 i，从 i 出发后必定会回到 i。

定理 3.1 (常返性判据). 状态 i 常返的充要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty \tag{64}$$

证明.

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(} n-k) \tag{65}$$

令 $P_{ij}^{(n)}$ 和 $f_{ij}^{(n)}$ 的母函数分别为 $P_{ij}(z)$ 和 $F_{ij}(z)$

$$F_{ij}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n \tag{66}$$

$$\begin{aligned} P_{ij}(z) &= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} z^n = \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} z^n \\ &= \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{ij}^{(k)} z^k\right) \sum_{n=k}^{\infty} \left(P_{jj}^{(n-k)} z^{n-k}\right) = \delta_{ij} + F_{ij}(z) P_{jj}(z) \end{aligned} \tag{67}$$

因此

$$P_{ii}(z) = \frac{1}{1 - F_{ii}(z)} \tag{68}$$

由 Abel 定理，令 $z \to 1$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{ii}} \tag{69}$$

□

命题 3.2. 有限状态 *Markov* 链一定存在常返态。

证明. 设 $E = \{1, 2, \cdots, N\}$，假设所有状态都是滑过态，取定 $i, \forall j$,

$$P_{ij}^{(k)} \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow \infty \tag{70}$$

因此

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij}^{(k)} \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow \infty \tag{71}$$

与 $\sum_{j=1}^{N} P_{ij}^{(k)} = 1$ 矛盾，因此至少存在一个常返态。 □

定义 3.9. 常返状态 i 的**平均返回时间** μ_i 定义为

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} \tag{72}$$

定义 3.10. 如果 $\mu_i < \infty$，则称状态 i **正常返**，否则称是**零常返**或**消极常返**。

命题 3.3. 有限状态的 *Markov* 链中一定存在正常返态。

推论 3.1. 不可约且状态有限的 *Markov* 链所有状态都是正常返态。

3.5 转移概率的极限行为

定义 3.11. 在不可约 Markov 链中，称非周期且正常返的状态为**遍历态**。

一个不可约、非周期、有限状态的 Markov 链一定是遍历的。

3.6 平稳分布

4 连续时间 Markov 链

Poisson 过程是连续时间 Markov 链的一个特例。对于连续时间 Markov 链,“停留”和“跳变”是两个关键特性。

4.1 Q 矩阵和 Kolmogorov 前进-后退方程

和离散的情况类似，连续时间齐次 Markov 链满足

$$P_{ij}(t+s)=\sum_{k\in E}P_{ik}(s)P_{kj}(t) \tag{73}$$

$$\mathbf{P}(t+s)=\mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t),\quad \mathbf{P}(0)=\mathbf{I} \tag{74}$$

连续时间没有最小单位，因此要引入 Q 矩阵。首先增加一个标准的转移概率的条件

$$\lim_{\Delta t\to 0}\mathbf{P}(\Delta t)=\mathbf{I} \tag{75}$$

利用连续性可得

$$P_{ij}(\Delta t)=\delta_{ij}+q_{ij}\Delta t+o(\Delta t) \tag{76}$$

称这里的 q_{ij} 为**转移率**。

$$q_{ii}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{ii}(\Delta t)-1}{\Delta t}=-q_i,\quad q_i\geqslant 0 \tag{77}$$

$$q_{ij}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t},\quad i\neq j \tag{78}$$

用 **Q 矩阵**表示为

$$\mathbf{Q}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{P}(t)|_{t=0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{P}(\Delta t)-\mathbf{I}}{\Delta t} \tag{79}$$

由

$$\frac{\mathbf{P}(t+\Delta t)-\mathbf{P}(t)}{\Delta t}=\mathbf{P}(t)\frac{\mathbf{P}(\Delta t)-\mathbf{I}}{\Delta t} \tag{80}$$

得 **Kolmogorov 前进方程**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}(t)\mathbf{Q} \tag{81}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{ij}(t)=-P_{ij}(t)q_j+\sum_{k\neq j}P_{ik}(t)q_{kj} \tag{82}$$

类似地，有 **Kolmogorov 后退方程**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{P}(t)=\mathbf{Q}\mathbf{P}(t) \tag{83}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{ij}(t)=-q_iP_{ij}(t)+\sum_{k\neq i}q_{ik}P_{kj}(t) \tag{84}$$

在状态有限的情况下，由 $\mathbf{P}(0)=\mathbf{I}$ 得，

$$\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}(0)e^{\mathbf{Q}t}=e^{\mathbf{Q}t} \tag{85}$$

设 $p_i(t)=P(X(t)=i),\mathbf{p}(t)=(p_0(t),p_1(t),\cdots)$，则有 **Fokker-Planck 方程**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p}(t)=\mathbf{p}(0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{P}(t)=\mathbf{p}(0)\mathbf{P}(t)\mathbf{Q}=\mathbf{p}(t)\mathbf{Q} \tag{86}$$

4.2 转移概率的极限行为

定义 4.1. 如果 $\boldsymbol{\pi}=\{\pi_k\}_{k=0}^{\infty}$ 满足

$$\pi\geqslant 0,\forall k,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\pi_k=1 \tag{87}$$

$$\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}\mathbf{P}(t) \tag{88}$$

则称 $\boldsymbol{\pi}$ 为该链的**平稳分布**。

命题 4.1. $\boldsymbol{\pi}$ *是连续时间 Markov 链的平稳分布的充要条件是*

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{Q}=\mathbf{0} \tag{89}$$

5 排队与服务系统

5.1 M/M/n 系统

M/M/n 系统顾客到达过程为 Poisson 过程，服务时间分布为负指数分布，系统中有 n 个服务台。设到达率为 λ，服务率为 μ，队伍长度 $X(t)$ 是连续时间 Markov 过程。

当一个服务台在 t 时刻正在提供服务，而 Δt 时间后没有结束服务的概率是

$$P(T_s > t+\Delta t|T_s > t) = P(\tau_s > \Delta t) = e^{-\mu\Delta t} = 1-\mu\Delta t + o(\Delta t) \tag{90}$$

当一个服务台 Δt 时间后结束服务的概率是

$$P(T_s < t+\Delta t|T_s > t) = P(\tau_s < \Delta t) = 1-e^{-\mu\Delta t} = \mu\Delta t + o(\Delta t) \tag{91}$$

设事件 $\{t < Y_k < t+\Delta t\}$ 表示服务机构有 $k(0 \leqslant k \leqslant n)$ 个服务台在时间 $(t, t+\Delta t)$ 内结束服务，$N(t)$ 表示时间 t 内到达排队系统的顾客的数量。

命题 5.1.

$$p_{i,i+1}(\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t) \tag{92}$$

$$p_{i,i-1}(\Delta t) = min(i,n)\mu\Delta t + o(\Delta t) \tag{93}$$

$$p_{i,i}(\Delta t) = 1-(\lambda + min(i,n)\mu)\Delta t + o(\Delta t) \tag{94}$$

$$p_{i,j}(\Delta t) = o(\Delta t), \quad |i-j| \geqslant 2 \tag{95}$$

证明.

$$\begin{aligned}
p_{i,i+1}(\Delta t) &= P(X(t+\Delta t) = i+1|X(t) = i) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(t < Y_k < t+\Delta t, N(t+\Delta t) - N(t) = k+1|X(t) = i) \\
&= P(t < Y_0 < t+\Delta t|X(t) = i)P(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) + o(\Delta t) \\
&= (1 - min(n,i)\mu\Delta t + o(\Delta t)) \cdot (\lambda\Delta t + o(\Delta t)) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)
\end{aligned} \tag{96}$$

$$\begin{aligned}
p_{i,i-1}(\Delta t) &= P(t < Y_1 < t+\Delta t, N(t+\Delta t) - N(t) = 0|X(t) = i) \\
&\quad + P(t < Y_2 < t+\Delta t, N(t+\Delta t) - N(t) = 1|X(t) = i) + o(\Delta t) \\
&= \binom{min(i,n)}{1}(\mu\Delta + o(\Delta t))(1-\mu\Delta + o(\Delta t))^{min(i,n)-1} \\
&\quad + \binom{min(i,n)}{2}(\mu\Delta + o(\Delta t))^2(1-\mu\Delta + o(\Delta t))^{min(i,n)-2} + o(\Delta t) \\
&= min(i,n)\mu\Delta t + o(\Delta t)
\end{aligned} \tag{97}$$

$$p_{i,i}(\Delta t) = 1 - p_{i,i+1}(\Delta t) - p_{i,i-1}(\Delta t) + o(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t - min(i,n)\mu\Delta t + o(\Delta t) \tag{98}$$

□

$X(t)$ 是一个生灭系统，生率 $\lambda_i=\lambda$，灭率为 $\mu_i=min(i,n)\mu$，定义服务强度 $\rho=\frac{\lambda}{n\mu}$。

命题 5.2. $X(t)$ 的平稳分布为

$$\pi_k=\begin{cases}\frac{1}{k!}(np)^k\pi_0, & k<n\\ \frac{n^n}{n!}p^k\pi_0, & k\geqslant n\end{cases} \tag{99}$$

证明. 由平稳分布 $\boldsymbol{\pi}\mathbf{Q}=0$ 得，

$$\begin{cases}\pi_1=\frac{\lambda}{\mu_1}\pi_0\\ \vdots\\ \pi_n=\frac{\lambda^n}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1}\pi_0\end{cases} \tag{100}$$

□

命题 5.3. 队长平均值

$$\begin{aligned}L&=\sum_{k=0}^{\infty}k\pi_k=\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{k!}(np)^k+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{kn^n}{n!}p^k\right)\pi_0\\ &=\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k-1)!}(np)^k+\frac{(n\rho)^n(\rho+n(1-\rho))}{n!(1-\rho)^2}\right)\pi_0\end{aligned} \tag{101}$$

平均等待队长

$$L_q=\sum_{i=1}^{\infty}i\pi_{n+i}=\frac{(n\rho)^n\rho}{n!(1-\rho)^2}\pi_0=\frac{\rho}{(1-\rho)^2}\pi_n \tag{102}$$

平均占用服务台数

$$K=L-L_q=n\rho=\frac{\lambda}{\mu} \tag{103}$$

M/M/n 系统到达的顾客总会得到服务，因此**系统损失率**为

$$P_L=0 \tag{104}$$

相对通过能力为

$$Q=1-P_L=1 \tag{105}$$

绝对通过能力为

$$A=\lambda Q=\lambda \tag{106}$$

顾客需要等待的概率为

$$P(X(t)\geqslant n)=\sum_{k=n}^{\infty}\pi_k=\frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)}\pi_0=\frac{\pi_n}{1-\rho} \tag{107}$$

设 W_q 为系统平稳之后一个顾客的等待时间，当服务台没有全部被占用时，不需要等待

$$P(W_q=0)=1-\frac{\pi_n}{1-\rho} \tag{108}$$

当服务台全部被占用时，顾客需要等待的时间和灭率分布相同，服从参数为 $n\mu$ 的指数分布

$$W_q \sim Exp(n\mu) \tag{109}$$

$X(t) = k > n$ 时才有顾客排队等候，新到达顾客等待时间服从分布

$$\sum_{i=1}^{k-n+1} W_{qi} \sim \Gamma(k-n+1, n\mu), \quad k = n, n+1, \cdots \tag{110}$$

概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(n\mu)^{k-n+1} x^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)} e^{-n\mu x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases} \tag{111}$$

因此

$$P(0 < W_q \leqslant t) = \sum_{k=n}^{\infty} \pi_k \int_0^t \frac{(n\mu)^{k-n+1} x^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)} e^{-n\mu x} \mathrm{d}x = \frac{\pi_n}{1-\rho} \left(1 - e^{-n\mu(1-\rho)t}\right) \tag{112}$$

$$F_{W_q}(t) = P(W_q \leqslant t) = P(W_q = 0) + P(0 < W_q \leqslant t) = \begin{cases} 1 - \frac{\pi_n}{1-\rho} e^{-n\mu(1-\rho)t}, & t > 0 \\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases} \tag{113}$$

$$f_{W_q}(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ (1 - \frac{\pi_n}{1-\rho})\delta(t) + n\mu\pi_n e^{-n\mu(1-\rho)t}, & t > 0 \end{cases} \tag{114}$$

$$E[W_q] = \frac{\pi_n}{(1-\rho)^2 n\mu} = \frac{L_q}{\lambda} \tag{115}$$

$$D[W_q] = \frac{\pi_n(2(1-\rho) - \pi_n)\rho^2}{(1-\rho)^4 \lambda^2} \tag{116}$$

接受服务的时间 τ_s 服从参数为 $n\mu$ 的指数分布，因此

$$E[\tau_s] = \frac{1}{\mu}, \quad D[\tau_s] = \frac{1}{\mu^2} \tag{117}$$

对于逗留时间

$$E[W] = E[W_q] + E[\tau_s] = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\rho\pi_n}{\lambda(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu} \right) = \frac{L}{\lambda} \tag{118}$$

5.2 Little 公式

设 $Na(t)$ 为 $(0,t]$ 时间内到达的顾客数量，则这段时间系统的进入率为 $\overline{\lambda_t} = \frac{E[Na(t)]}{t}$。